Vectori

A(2,3), B(1,5). Vectorul $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1.5)-(2.3)=(-1,2)=-1\vec{i}+2\vec{j}$ Scadem B-A

2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(2.3)+(1.5)=(3,8)=3\vec{i}+8\vec{j}$ Adunam A cu B

3) $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{w}=-\vec{i}+m\vec{j}$. m = ? a.i. vectorii sunt coliniari (sau paraleli)

Tb ca $\vec{v}=\alpha\vec{w} \Rightarrow 2\vec{i}+3\vec{j}=\alpha(-\vec{i}+m\vec{j}) \Rightarrow 2\vec{i}+3\vec{j}=-\alpha\vec{i}+m\alpha\vec{j}$ deci $\alpha=-2$ si $m=\frac{3}{\alpha}=\frac{3}{-2}$

4) $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{w}=-\vec{i}+m\vec{j}$. m = ? a.i. vectorii sunt perpendiculari (sau ortogonali)

Tb ca $\vec{v}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (2\vec{i}+3\vec{j})\cdot(-\vec{i}+m\vec{j})=0 \Rightarrow -2+3m=0$ deci $m=2/3$

5) A,B,C varfurile unui triunghi. Atunci $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$

Geometrie

Se dau toate laturile triunghiului a = BC, b=AC, c = AB, se cere : cos A sau cos B sau unghiul A

Th cosinusului $a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos A$; $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A$

Daca cere cos B, inlocuim in formula a cu b; cere cos C, inlocuiesc a cu c

Aria unui triunghi :

1)daca se dau toate laturile, putem aplica formula lui Heron

A = $\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$, unde $p=\frac{a+b+c}{2}$

2) Daca se dau 2 laturi AB si AC si unghiul dintre ele A, at Aria = $\frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}$

3) Daca se da un triunghi echilateral, A = $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$; inaltimea tr echilateral $h=\frac{l\sqrt{3}}{2}$

4) Se dau toate laturile,numere diferite.se verifica daca triunghiul este dreptunghic, adica daca este valabila th lui Pitagora $AB^2+AC^2=BC^2$; daca se verifica, at e triunghi dreptunghic in A

Aria triunghiului dreptunghic A = $\frac{c_1\cdot c_2}{2}$; inaltimea tr dreptunghic $h=\frac{c_1\cdot c_2}{ip}$

Mediana intr-un tr dreptunghic este jumatate din ipotenuza.

Pb : AB=6, AC=8, BC=10. M mijlocul lui BC, AM = ?

Verificam daca e triunghi dreptunghic, cu Th Pit : $6^2+8^2=10^2$ Adevarat,deci dreptunghic in A

AM mediana, AM = jumatate din ipotenuza, deci AM = 5

Trigonometrie

$\sin(90^0-x)=\cos x$ $\cos(90^0-x)=\sin x$ ex : $\sin 20^0=\cos 70^0$, $\cos 40^0=\sin 50^0$,

$\sin(90^0+x)=\cos x$ $\cos(90^0+x)=-\sin x$ ex : $\sin 120^0=\cos 30^0$, $\cos 140^0=-\sin 50^0$

1)Problemele de forma $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, trebuie sa punem acelasi unghi la amandoua

ex : $\sin^2 100+\cos^2 80=?$ sin 100=sin(90+10) = cos10 = sin 80, deci

$\sin^2 100+\cos^2 80=\sin^2 80+\cos^2 80=1$

2)sin 60 – cos 30 = cos 30 – cos 30 = 0

3) $\sin(-10)\cdot\sin(-9)\cdot ....\cdot\sin 9\cdot\sin 10=0$, pt ca sin 0 = 0

4) cos 10 + cos 20 + cos 160 + cos 170 = cos 10 + cos 20 –sin 60 – sin 70 =

cos 10 + cos 20 – cos 20 – cos 10 = 0

5) Daca sinx = 1 / 2, aflati cosx,unde $x\in(90,180)$.

Din $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, avem $(1/2)^2+\cos^2 x=1$, $\cos^2 x=1-1/4=3/4$

$\cos x=\pm\sqrt{3}/2$. cum $x\in(90,180)$, at cos < 0 deci $\cos x=-\sqrt{3}/2$

x	0	30	45	60	90
sinx	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cosx	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tg x=sin/cos	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	Nu exista
ctgx=cos/sin	Nu exista	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Ec de grad 2. $\Delta = b^2 - 4ac$; $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

1. $f(x) = x^2 - mx + m - 1$; m = ? daca graficul este tangent axei OX ?
tb ca $\Delta = 0$. $\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m-1) \Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = 2$
2) Aratati ca ecuatia nu are solutii reale : tb ca $\Delta < 0$ 3) Ar ca graficul lui f este deasupra axei OX : tb ca $\Delta < 0$
4) determinati m a.i. $f(x) \geq 0$. tb ca $\Delta \leq 0$
5) Varful $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$; unde $\frac{-\Delta}{4a}$ = MIN sau MAX ; $\frac{-b}{2a} =$ abscisa varfului şi axa de simetrie.
6) Scrieti ec de grad 2 cu $x_1 = 3, x_2 = -5$ Avem $x^2 - Sx + P = 0$; S = 3+(-5)=-2 , P = - 15 , $x^2 + 2x - 15 = 0$
7) m= ? a.i. $x^2 + mx - 15 = 0$ are 2 solutii reale de sens opus
Cum produsul sol este negativ, - 15 , inseamna ca m poate lua orice valoare, deci $m \in R$

Inecuatia de grad 2
Determinati solutiile intregi ale inec $(x-2)^2 + x - 3 \leq 11$
Avem $x^2 - 4x + 4 + x - 3 \leq 11$, deci $x^2 - 3x - 10 \leq 0$; Rezolv ecuatia atasata $x^2 - 3x - 10 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 5$
Fac tabel

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
$x^2 - 3x - 10 \leq 0$	+ + + + +	0 - - -	0 + + + + +	

Cum vreau ≤ 0, $x \in [-2,5]$. Sol intregi sunt { - 2, - 1, 0 , 1, 2, 3, 4 ,5}
Obs. Daca inecuatia era < 0 , puneam paranteze rotunde.

Ecuatii irationale $\sqrt{x+2} = x - 4$
Conditii de existenta : $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 4 \end{cases}$ D = $[4, +\infty)$
Rezolvare : ridic la patrat $x + 2 = (x-4)^2 \Rightarrow x + 2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow$ x = 2, x = 7
Doar 7 e solutie, fiind in domeniul D

Combinatorica 0! = 1 , $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$; $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$; $P_n = n!$
1) $C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ 2) $\frac{(n-3)!}{(n-5)!} = (n-4)(n-3)$
3) Cate numere de 3 cifre distincte se pot forma cu { 1,2,3,4,5} ?
cum 123 $\neq$ 213 , avem perechi ordonate, deci aranjamente A_5^3
4) Cate numere de 3 cifre distincte se pot forma cu {0, 1,2,3,4,5} ?
cum 123 $\neq$ 213 , avem perechi ordonate, deci aranjamente . Dar, trebuie sa scadem numerele care incep cu 0, 012,013, etc . Acestea sunt in numar de A_5^2, pt ca aranjez { 1,2,3,4,5} cate 2. Rezultatul final, $A_6^3 - A_5^2$
5) Cate triunghiuri se pot forma cu { 1,2,3,4,5} ?
Cum triunghiul 123 = tr 213, avem perechi neordonate, deci combinari C_5^3
6) Cate submultimi cu 2 elemente are multimea { 1,2,3,4,5} ? C_5^2

Functii
1) $f : [1,7] \longrightarrow R$. f(x) = x + 2 ; Multimea valorilor functiei f = $f([1,7]) = [3,9])$; f(1)=3 ; f(7)=9 .
2) $f(x) = x^2 - 2x - 1$, g(x) = $x - 3$ .Determinati punctele de intersectie ale graficelor.
$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$; fac g(1) = -2, g(2) = 0 $\Rightarrow A(1,-2)$,B(2,0)
3) $f(x) = 5x + 4$. Verificati daca A(2,14) apartine graficului.
A(x,y) $\in Gr_f$ daca $f(x) = y$ deci $f(2) = 14$. $f(2) = 5 \cdot 2 + 4 = 14 \Rightarrow A(2,14) \in Gr_f$
4) $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Determinati intersectia cu axele de coordonate.
$\cap$ cu OX : $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2 \Rightarrow A(1,0)$, B(2,0)
$\cap$ cu OY : $f(0) = 2 \Rightarrow$ C (0,2)

Logaritmi $\lg x = \log_{10} x$ **;** $\log_a a = 1$ **;** $\log_a 1 = 0$ **;** $\log_3 \frac{1}{9} = -2$

1) $\log_5 10 + \log_5 3 - \log_5 6 = \log_5 \frac{10 \cdot 3}{6} = \log_5 5 = 1$

2) $2\log_3 4 - 4\log_3 2 = \log_3 4^2 - \log_3 2^4 = 0$

3) $\log_5(2x+3) = 2$ Conditii de existenta : $2x+3>0 \Rightarrow x > -3/2$, D = $(-3/2, +\infty)$

Rezolvare : $2x+3 = 5^2$, $x = 11 \in D$

4) $\log_2(x+2) + \log_2 x = 3$. Conditii de existenta : $\begin{cases} x+2>0, x>-2 \\ x>0 \end{cases}$ D = $(0, \infty)$

Rez. $\log_2(x+2)\cdot x = 3 \Rightarrow (x+2)\cdot x = 2^3 \Rightarrow x^2+2x-8=0 \Rightarrow x_1=-4, x_2=2$. Doar 2 e solutie

5) $\log_2(x+2) - \log_2(x-5) = 3$ Conditii de existenta : $\begin{cases} x+2>0, x>-2 \\ x-5>0, x>5 \end{cases}$ D = $(5, \infty)$

Rez. $\log_2 \frac{x+2}{x-5} = 3 \Rightarrow \frac{x+2}{x-5} = 2^3 \Rightarrow x+2 = 8x-40 \Rightarrow x = 6 \in D$

Exponentiale

1) $4^{x+2} = 8 \Rightarrow 2^{2(x+2)} = 2^3 \Rightarrow 2x+4=3 \Rightarrow x = -1/2$ 2) $125^x = \frac{1}{25} \Rightarrow 5^{3x} = 5^{-2} \Rightarrow x = -2/3$

3) $2^{x+3} + 2^{x+1} = 80 \Rightarrow 2^x \cdot 2^3 + 2^x \cdot 2^1 = 80 \Rightarrow 8\cdot 2^x + 2\cdot 2^x = 80 \Rightarrow 10\cdot 2^x = 80 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

4) $2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{5}{2}$. Notez $2^x = t \Rightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow t = 2, t = \frac{1}{2}$

$2^x = 2 \Rightarrow x = 1$, $2^x = 1/2 \Rightarrow x = -1$

5) $4^x - 10\cdot 2^x + 16 = 0$. Notez $2^x = t \Rightarrow t^2 - 10t + 16 = 0 \Rightarrow t = 2, t = 8$. $2^x = t \Rightarrow x = 1, x = 3$

Progresii aritmetice

1) in progresia aritmetica , avem $a_4 = 15$, $a_8 = 27$. Aflati S_{21}

$a_8 = a_4 + 4r \Rightarrow 27 = 15 + 4r \Rightarrow r = 3$; $a_4 = a_1 + 3r \Rightarrow a_1 = 15 - 9 = 6$; $a_{21} = a_1 + 20r \Rightarrow a_{21} = 66$

$S_{21} = 6 + 9 + ... + 66 = \frac{(6+66)\cdot 21}{2}$

2) Proprietate : a,b, c sunt in progresie aritmetica, daca $b = \frac{a+c}{2}$

Aratati ca $5\cdot 3^x + 1$, 3^{x+1}, $3^x - 1$ sunt in progresie aritm. $3^{x+1} = \frac{5\cdot 3^x + 1 + 3^x - 1}{2} = \frac{6\cdot 3^x}{2} = 3\cdot 3^x$ Adevarat

3) 1+6+11+…..+81 = $\frac{(1+81)\cdot 17}{2}$

de la 1 la 81, distanta e de 81. cum ratia e 5, avem 80:5 = 16 ratii, deci 81 este termenul 17

4) 1, x , x+3 , 10 sunt in p.a. x = ? de la $a_1 = 1$ pana la $a_4 = 10$ sunt 3 ratii , deci ratia e 3 $\Rightarrow x = 1 + 3 = 4$

Progresii geometrice

1) in prog geom, $b_3 = 12, b_5 = 48$. Aflati b_2.

Ratia se noteaza cu q, iar de la un termen la altul se inmulteste cu q, nu se face adunare, ca la aritmetica

$b_5 = b_3 \cdot q^2 \Rightarrow 48 = 12\cdot q^2 \Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = 2$; $b_3 = b_2 \cdot q \Rightarrow b_2 = 12 : 2 = 6$

2) $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$1 + 2^1 + ... + 2^8 = 1\cdot \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 2^9 - 1$; $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} ..... + \frac{1}{3^5} = 1\cdot \frac{(\frac{1}{3})^6 - 1}{\frac{1}{3} - 1}$

Analitica.

1. lungimea segmentului AB, distanta de la A la B = $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - Y_B)^2}$

2. Mijlocul segmentului AB este M = $\frac{A+B}{2} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

3. panta dreptei AB este $m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

4. ecuatia dreptei AB : $y - y_A = m_{AB} \cdot (x - x_A)$ 5. Ecuatia dreptei cu determinant : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$

6. A, B, C sunt coliniare, daca determinantul de la 5 este 0.

7. Aria triunghiului ABC este A = $\frac{|\det er \min ant|}{2}$ adica fara semnul minus, luam doar numarul de la det

8. Ecuatia medianei din A : fie M mijlocul lui BC, deci M = $\frac{B+C}{2}$. Apoi putem aplica form 5 pt A si M

9. Simetricul lui A fata de B : unesc A cu B, prelungesc cu un segment egal, capatul S, S (x,y)
B este mijlocul lui AS, deci B = $\frac{A+S}{2} \Rightarrow 2B = A + S$

OBS Daca avem ecuatia dreptei sub forma generala, atunci pentru a scoate panta scoatem y :
y = mx+n , unde m este panta dreptei
Doua drepte sunt paralele daca au pantele egale $m_1 = m_2$
Doua drepte sunt perpendiculare daca produsul pantelor este -1 $m_1 \cdot m_2 = -1$

10) fie d 1 : $2x + 3y - 5 = 0$, d 2 : $ax + 2y - 4 = 0$. A = ? a.i. sreptele sunt a) paralele, b) perpendiculare
Rez. Aflu pantele celor 2 drepte :
d 1 : $2x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow 3y = -2x + 5 \Rightarrow y = \frac{-2}{3}x + \frac{5}{3}$, deci panta $m_1 = \frac{-2}{3}$
d 2 : $ax + 2y - 4 = 0 \Rightarrow 2y = -ax + 4 \Rightarrow y = \frac{-a}{2}x + 2$, deci panta $m_2 = \frac{-a}{2}$
a) drepte paral $\Rightarrow m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{-2}{3} = \frac{-a}{2} \Rightarrow a = \frac{4}{3}$; a) drepte perp $\Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow \frac{-2}{3} \cdot \frac{-a}{2} = -1 \Rightarrow a = -3$

11) Ecuatia dreptei care trece prin A (1 , 2) si e paralela cu d : 2x – y + 3 = 0
Rez. Scot panta din ec lui d : y = 2x+3 , deci panta = 2. Scriu ec dr : $y - y_A = m \cdot (x - x_A)$, $y - 2 = 2 \cdot (x - 1)$
Desfac parantezele , trec totul intr-o parte, 2x – y = 0.

12) A (2,3) , B (1, 5) . Aflati aria triunghiului echil de latura AB
Aflu AB = $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - Y_B)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$; Aria = $\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{5})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

Probabilitati Probabilitatea ca un numar din A={1,2,3,4,5} sa verifice relatia $n^2 + 1 < 20$
Se inlocuieste pt fiecare n, iar $P(n) = \frac{nr.cazuri.favorabile}{nr.cazuri.totale} = \frac{4}{5}$ (merg 4 din 5 posibile)

Relatiile lui Viete 1) fie ec $x^2 - (2m+1)x + 3m = 0$. m = ? a.i. $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = 11$
Din rel lui Viete, $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2m+1}{1} = 2m+1 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3m}{1} = 3m \end{cases}$ $\Rightarrow$S+P=11 $\Rightarrow$5m+1=11, m = 2

2) fie ec $x^2 - 2008x + 1 = 0$. Calc $x_1 + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1^2 + 1}{x_1} = \frac{2008 \cdot x_1}{x_1} = 2008$ Am adus la acelasi numitor, apoi din ecuatie, am scos $x^2 + 1 = 2008x$, relatie care se verifica si xand inlocuiesc x cu x_1

Formule de derivare

1. $\left(x^n\right)' = n\cdot x^{n-1}$	exemplu : $\left(x^2\right)' = 2\cdot x$; $\left(x^3\right)' = 3\cdot x^2$; $\left(x^{11}\right)' = 11\cdot x^{10}$; $\left(x^{2009}\right)' = 2009\cdot x^{2008}$		
2. $x' = 1$	3. (orice numar $)' = 0$. exemplu : $7' = 0$; $25' = 0$		4. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$
5. $(\cos x)' = -\sin x$	6. $(\sin x)' = \cos x$	6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	7. $(e^x)' = e^x$
9. $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$; unde a >0 ; exemplu : $(2^x)' = 2^x\cdot\ln 2$; $(5^x)' = 5^x\cdot\ln 5$			

Exemplu : e1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 11 + 4e^x - 2\ln x + \sqrt{x} + 5^x$. Atunci

$$f'(x) = 3x^2 + 3\cdot 2x - 9\cdot 1 + 0 + 4\cdot e^x - 2\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5^x\cdot\ln 5$$

e2) $f(x) = x^3\cdot\ln x$ $\qquad (f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

Atunci $f'(x) = (x^3)'\cdot\ln x + x^3\cdot(\ln x)' = 3x^2\cdot\ln x + x^3\cdot\frac{1}{x} = 3x^2\cdot\ln x + x^2$

E3) $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$; $\qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$

Atunci $f'(x) = \frac{(3x+1)'\cdot(x-1) - (3x+1)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{3\cdot(x-1) - (3x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{3x-3-3x-1}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2}$

1. Asimptote orizontale Fie $f(x) = \frac{x^2-9x+5}{x-2}$. Determinati asimptotele orizontale catre $+\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-9x+5}{x-2} = \infty$, deci f(x) nu are asimptote orizontale catre $+\infty$

2. Asimptote oblice Fie $m = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ si $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - m\cdot x)$. $\quad y = mx + n$ este asimptota oblica catre ∞.

Exerc1. Fie $f(x) = \frac{x^2-9x+5}{3x-2}$. Determinati asimptotele oblice catre ∞.

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-9x+5}{3x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-9x+5}{3x^2-2x} = \frac{1}{3}$$

$n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - m\cdot x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-9x+5}{3x-2} - \frac{1\cdot x}{3}$ = aducem la acelasi numitor, prima cu 3, a doua cu $3x-2$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-27x+15-3x^2+2x}{9x-6} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{-25x+15}{9x-6} = \frac{-25}{9} \Rightarrow y = mx + n = \frac{1\cdot x}{3} - \frac{25}{9}$ este asimptota oblica catre ∞.

Regula lui l'Hospital. In cazul limitelor $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ derivam si sus si jos, separat

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} \underset{l'Hospital}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x}{1} = 0$ $\qquad$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^x = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} \underset{l'Hospital}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0$

Monotonie (crescatoare sau descrescatoare) si convexitate.

1. Fie $f(x): R \to R,\ \ f(x) = x^3 - 3x + 1$

a) Calculati $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ b) Ecuatia tangentei la graficul lui f, in punctul $x_0 = 1$

c) Aratati ca f este descrescatoare, pe intervalul (-1, 1) ; d) Aratati ca $f(x) \ge -1, \forall x > -1$

e) Aratati ca f (2009) > f (2007) ; f) Studiati convexitatea functiei.

a) Din definitia derivatei, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. Deci noi avem de calculat $f'(2)$. Mai intai derivam, apoi inlocuim x cu 2 : $f(x) = x^3 - 3x + 1 \ \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$; $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$

b) Formula pentru ecuatia tangentei la graficul functiei f(x) : $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Noi avem $x_0 = 1$, deci tangenta : $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \ \Rightarrow \ y - (-1) = 0 \cdot (x - 1) \ \Rightarrow \ y + 1 = 0$

c) Pentru a studia monotonia, adica daca o functie este crescatoare sau descrescatoare, mai intai derivam, apoi rezolvam ecuatia $f' = 0$, aflam solutia, apoi facem tabel de semn pt f'. Avem :

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f' = 0 \ \Rightarrow \ 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \ 3x^2 = 3 \ \Rightarrow \ x^2 = 1 \Rightarrow \ x = \pm 1$

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + 0 - - - - - - - - -0 + + + + + +
$f(x)$	3 -1

d) din tabel,observam ca – 1 este Minim pentru orice $x > -1$, deci $f(x) \ge -1, \forall x > -1$

e) functia este crescatoare pe $(1, \infty)$. Cum 2009 > 2007, rezulta ca si $f(2009) > f(2007)$

Obs – se pastreaza semnul, pentru ca functia este crescatoare. Daca era descrescatoare, schimbam semnul intre ele, deci as fi obtinut ca $f(2009) < f(2007)$

f) Pentru a studia convexitatea sau concavitatea unei functii, derivam de doua ori, rezolvam ecuatia $f'' = 0$ si facem tabel de semn. $f'(x) = 3x^2 - 3 \ \Rightarrow f'' = 6x$; $f'' = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f''(x)$	- - - - - - - 0 + + + + + +
$f(x)$	f(0)=1 Concava convexa

Problema 2) 1. Fie $f(x): (0, \infty) \to R,\ \ f(x) = \frac{\ln x}{x}$ Obs. $\ln e = 1; \ln 1 = 0;\ \ \ln e^x = x$

Aratati ca $f(x) \le \frac{1}{e}, \forall x > 0$

c) monotonia, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$; $f' = 0 \ \Rightarrow \ 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow \ x = e$.

x	0 e $+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + + + 0 - - - - - - - - - - - -
$f(x)$	f(e)= $\frac{1}{e}$

observam din tabel ca ‘ $\frac{1}{e}$ ‘ este Maxim, deci $f(x) \le \frac{1}{e}, \forall x > 0$

Integrale

1)	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$ **;** $\int x \ dx = \frac{x^2}{2}$ **;** $\int 5dx = 5x$
	$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$	$\int \sqrt[4]{x} dx = \int x^{\frac{1}{4}} = \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}$
2)	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5}$; $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3}$
3)	$\int e^x dx = e^x + C$	**4)** $\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$
5)	$\int \sin x dx = -\cos x$	**6)** $\int \cos x dx = \sin x + C$

Ex.1. Fie $f(x) = \begin{cases} 2x+3, daca & x \geq 3 \\ 5x-6, daca & x < 3 \end{cases}$ Ar ca f admite primitive

Rezolvare : f admite primitive daca f este continua in 3, adica $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = f(3)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} (5x-6) = 5\cdot 3 - 6 = 9$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (2x+3) = 2\cdot 3 + 3 = 9$

Cerinte :

1. Ar ca F este o primitiva a lui f. Tb ar ca $F' = f$
2. Determinati primitivele lui f. Tb sa calculam integrala din f $\int f(x)dx = F(x) + C$
3. $\int f'(x)dx = f(x)$
4. Ar ca orice primitiva a lui f este crescatoare pe R.
 Fie F o primitiva. Ii studiem monotonia lui F ; Cum $F' = f > 0 \Rightarrow$ F crescatoare
5. Aria suprafetei plane determinata de dreptele $x = a$, $x = b$: A = $\int_a^b f(x)dx$
6. Volumul corpului de rotatie pt f : [a,b] $\to R$, V = $\Pi \cdot \int_a^b f^2(x)dx$
7. fie g o primitiva pt f. Atunci $\int f(x)\cdot g(x)dx = \int t \quad dt = \frac{t^2}{2} = \frac{g^2(x)}{2}$

(prin substitutia $g(x) = t, \quad g'(x)dx = dt,$ adica $f(x)dx = dt$)

8. $\int (x\cdot \ln x)dx = \frac{x^2}{2}\cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x} \ dx = \frac{x^2}{2}\cdot \ln x - \int \frac{x}{2} \ dx = \frac{x^2}{2}\cdot \ln x - \frac{x^2}{4}$
9. $\int x\cdot e^x \ dx = x\cdot e^x - \int e^x \ dx = x\cdot e^x - e^x$
10. $\int \frac{\ln x}{x} \ dx = \int t \ dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2}$
11. $\int \ln x \ dx = \int 1\cdot \ln x \ dx = x\cdot \ln x - \int x\cdot\frac{1}{x} dx = x\cdot \ln x - x$

Legi de compozitie – grupuri

Exercitii. 1) Fie M = $(2,+\infty)$. Pe M, definim legea $x*y = x\cdot y-2\cdot x-2\cdot y+6$.

Asociativitatea : $\forall\ x,y,z\in M$, $(x*y)*z = x*(y*z)$

$(x*y)*z =$ (intai inmultim cele 2 numere, apoi scadem $2\cdot$ *primul* , scadem $2\cdot$ *al* doilea si adunam 6.

$= (x\cdot y-2\cdot x-2\cdot y+6)\cdot z - 2\cdot(x\cdot y-2\cdot x-2\cdot y+6)-2\cdot z+6$ = xyz-2xz-2yz+6z-2xy+4x+4y-12-2z+6

$x*(y*z) = x\cdot(y\cdot z-2\cdot y-2\cdot z+6)-2\cdot x-2\cdot(y\cdot z-2\cdot y-2\cdot z+6)$ +6 = xyz-2xy-2xz+6x-2x-2yz+4y+4z-12+6 .

Comutativitatea. $\forall\ x,y\in M$, $x*y = y*x$

$x\cdot y-2\cdot x-2\cdot y+6 = y\cdot x-2\cdot y-2\cdot x+6$, deci am obtinut acelasi lucru, deoarece $x\cdot y = y\cdot x$

elementul neutru $\forall\ x\in M$, atunci $x*e = e*x = x$.

$x\cdot e-2\cdot x-2\cdot e+6$ = x ; $e\cdot(x-2) = x+2\cdot x-6$, deci $e = \dfrac{3x-6}{x-2} = 3$. 3 $\in$ M = $(2,+\infty)$ deci e =3

inversul lui x $x*x' = x'*x = e$, deci $x*x' = 3$

$x\cdot x'-2\cdot x-2\cdot x'+6 = 3$; $x'\cdot(x-2) = 3-6+2\cdot x \Rightarrow x' = \dfrac{2x-3}{x-2}$ >2 deci $x'\in$ M = $(2,+\infty)$,

Daca vrem sa calculam inversul lui 5, este : $= \dfrac{2\cdot 5-3}{5-2} = \dfrac{7}{3}$

Legea este bine definita, daca pentru $x\in M, y\in M$ si $x*y\in M$.

$x*y = x\cdot y-2\cdot x-2\cdot y+6 = (x-2)(y-2)+2$

Cum x >2, $y > 2$, avem ca x -2 > 0 si y-2> 0 , deci $(x-2)(y-2)+2$ >0+2 , > 2, adica $x*y>2$, deci $x*y\in M$

Aratati ca $(M,*)$ **este grup –** Cum * este Asociativa, admite element neutru si orice element din M este inversabil, at este grup. (obs ca 2 este singurul element din R care nu e inversabil, pt ca se anuleaza fractia de la invers)

Ex 2. Fie M = $(3,+\infty)$. Pe M, definim legea $x\circ y = x\cdot y-3\cdot x-3\cdot y+12$.

a) Verificati daca $x\circ y = (x-3)(y-3)+3$

desfacem parantezele $(x-3)(y-3)+3 = x\cdot y-3\cdot x-3\cdot y+9+3 = x\cdot y-3\cdot x-3\cdot y+12$

b) Rezolvati ecuatia $x\circ 3 = 3$ facem calculele, obtinem 3 = 3 $\Rightarrow x\in R$

c) Calculati $1\circ 2\circ 3\circ \ldots\ldots\circ 100 = x\circ 3\circ y = 3$

d) $x\circ x\circ x\circ x$ =19 ; $(x-3)^4+3 = 19 \Rightarrow (x-3)^4 = 16 \Rightarrow (x-3) = \pm 2 \Rightarrow x = 5, x = 1$

e) $x\circ x\circ x$ =11 ; $(x-3)^3+3 = 11 \Rightarrow (x-3)^3 = 8 \Rightarrow (x-3) = 2 \Rightarrow x = 5$

f) $x\circ x\circ x = x$; $(x-3)^3+3 = x \Rightarrow (x-3)^3 = x-3 \Rightarrow t^3 = t \Rightarrow t^3-t = 0,\ t(t^2-1) = 0$

$\Rightarrow t = \{0,1,-1\} \Rightarrow x = \{3,4,2\}$

Polinoame

1. a este radacina pt f , daca $f(a)=0$

2. Restul la impartirea unui polinom cu $x-a$ este $f(a)$

$f=x^4+2x^3-5x+7$. Determinati restul la impartirea cu $x+1$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$. Calculez $f(-1)=(-1)^4+2(-1)^3-5(-1)+7=1-2+5+7=11$. Restul = 11

3. Daca g divide f, atunci restul la impartirea f la g este 0. Sau, radacinile lui g sunt radacini si pt f. Aflam deci radacinile lui g si le verificam in f

$f=(x+1)^{10}+(x-1)^{10}$, $g=x^2-3x+2$. Aratati ca g nu divide f

$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=1, x=2$; Calculez $f(1)$ si $f(2)$ sa vad daca daca 0. $f(1)=2^{10}$; $f(2)=3^{10}+2^{10}$

4. Determinati restul la impartirea lui f la g , $f=(x+2)^{10}+(x-1)^{10}$, $g=x^2+x-2$

Descompunem g : $x^2+x-2=0 \Rightarrow x=-2, x=1 \Rightarrow g=(x+2)(x-1)$

Daca impart, obtin : $f=g\cdot cat+rest \Rightarrow f=(x+2)(x-1)\cdot cat+ax+b$.

Calculez $f(-2)$ si $f(1)$ si o sa dispara parantezele.

$\begin{cases} f(-2)=-2a+b=(-3)^{10}=3^{10} \\ f(1)=a+b=3^{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a+b=3^{10} \\ a+b=3^{10} \end{cases}$ Scadem relatiile, dipare b $\Rightarrow -3a=0 \Rightarrow a=0$, $b=3^{10}$

5. $f=x^3+5x^2-4x-4$. Descompuneti f . Tb sa aflam radacinile, iar $f=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Caut radacini printre $D_4=\{\pm1, \pm2, \pm4\}$.

Cum $f(-2)=0 \Rightarrow x_1=-2$. Fac impartirea la $x-(-2)=x+2$

6. Aratati ca radacinile lui f nu sunt toate reale

Calculez $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=S^2-2P<0$, deci radacinile nu pot fi toate reale

Relatiile lui Viete : $f=ax^3+bx^2+cx+d$, $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\dfrac{-b}{a} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=\dfrac{-d}{a} \end{cases}$

6. $f=x^3+5x^2-4x-4$

a) suma radacinilor este : -5

b) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=S^2-2P=(-5)^2-2(-4)=25+8=33$

c) $x_1^3+x_2^3+x_3^3=?$ Scriu relatia de 3 ori, inlocuiesc intai cu x_1, apoi cu x_2 , x_3 (scriu direct sistemul 2)

$\begin{cases} x^3+5x^2-4x-4=0 \\ x^3+5x^2-4x-4=0 \\ x^3+5x^2-4x-4=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1^3+5x_1^2-4x_1-4=0 \\ x_2^3+5x_2^2-4x_2-4=0 \\ x_3^3+5x_3^2-4x_3-4=0 \end{cases}$; adun $\Rightarrow S^3+5S^2-4S-12=0$, de unde scot S^3

d) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}$ Am adus la acelasi numitor