Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că numărul $N=\log_5 7+\log_5 35-2\log_5 \frac{7}{25}$ este natural.

5p **2.** Știind că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$, calculați $S=(f\circ f)(1)+(f\circ f)(2)+\ldots+(f\circ f)(10)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2+1\right)+3=\log_2\left(7x^2+9\right)$.

5p **4.** Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{i, i^2, i^3, i^4\right\}$, unde $i^2=-1$, acesta să fie număr real.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,n)$, $N(n,3)$ și $P(2n,5)$, unde n este număr natural. Știind că vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{MP}$ sunt coliniari, determinați numărul natural n.

5p **6.** Arătaţi că $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $X(a)=\begin{pmatrix}2&4&1\\3&9&1\\a&a^2&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(X(-1)\right)=12$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det\left(X(a)-I_3\right)=0$.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$, $B(3,9)$ și $C\left(a,a^2\right)$, unde a este număr natural. Determinați numerele naturale a pentru care ABC este triunghi și are aria mai mică decât 3.

2. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}1+3x&3x\\-3x&1-3x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Demonstrați că $M(x)M(y)=M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați inversa matricei $M(x)$, unde x este număr real.

5p **c)** Determinați numărul real pozitiv x pentru care are loc egalitatea $M\left(\sqrt{x}\right)M\left(\sqrt{x+5}\right)=M(5)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x}$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}$.

5p **b)** Determinați ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că există un singur număr natural nenul m pentru care $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(mx)}{f(x)}=m^2-m$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2-ax+2a-4, & x\in(-\infty,2)\\ 2^{x-1}-2, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4f(x)}{(1-2x)^2}=1$, pentru orice număr real a.

5p	**b)** Demonstrați că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real a.
5p	**c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, $a<3$, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1,3)$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați numărul real x, știind că numerele $x+2$, 7 și $2x$ sunt în progresie aritmetică.
5p	**2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-2(m-1)x+2m^2-2m=0$. Determinați numărul real m, $m\neq 0$, $m\neq 1$ pentru care $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=4$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{2x}=125\cdot 5^{-x}$.
5p	**4.** Determinaţi probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu două elemente ale mulțimii $M=\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, aceasta să conțină elementul 10.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(2,3)$ și $C(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.
5p	**6.** Arătați că $2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x+1=0$, știind că $\sin x=\frac{1}{3}$ și $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}\frac{x+1}{2} & \frac{x-1}{2}\\ \frac{x-1}{2} & \frac{x+1}{2}\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculați $\det\big(A(3)\big)$.
5p	**b)** Demonstrați că $\det\big(A(x)\big)\cdot\det\big(A(y)\big)=\det\big(A(xy)\big)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Demonstrați că $\det\big(A(1)+A(2)+\ldots+A(n)\big)=n\Big(\det\big(A(1)\big)+\det\big(A(2)\big)+\ldots+\det\big(A(n)\big)\Big)$, pentru orice număr natural nenul n.
	2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Calculați $A-B$.
5p	**b)** Arătați că $(A+I_2)\cdot(B-I_2)=6\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Demonstrați că, dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X\cdot A=A\cdot X$ și $X\cdot B=B\cdot X$, atunci $X\cdot Y=Y\cdot X$, pentru orice $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+ax+6}{x+1}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Pentru $a=7$, calculaţi $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.
5p	**b)** Determinați numărul real a, pentru care dreapta de ecuaţie $y=x+2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că, oricare ar fi numărul real a, funcția f **nu** admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2mx}{2-x}, & x\in(-\infty,-2)\\ 2x+4-m, & x\in[-2,+\infty)\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Demonstrați că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Pentru $m=1$, rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x)=0$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Simulare pentru elevii clasei a XI-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi numărul real x ştiind că numerele 4, 36 şi x sunt în progresie geometrică.
5p	**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a pentru care $(f\circ f)(x)=x$ pentru orice număr real x.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{-x+2}=\sqrt{3}$.
5p	**4.** Determinaţi numărul submulţimilor cu cel mult 3 elemente ale mulţimii $M=\{1,2,3,4\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2,-3)$ şi dreapta $d:2x+y-5=0$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta d.
5p	**6.** Calculaţi $\sin 2x$, ştiind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(0,2)$, $B(3,5)$ şi $C(6,8)$.
5p	**a)** Determinaţi ecuaţia dreptei AC.
5p	**b)** Verificaţi dacă punctele A, B şi C sunt coliniare.
5p	**c)** Demonstraţi că aria triunghiului AOB este egală cu aria triunghiului BOC.
	2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Calculaţi $2A+2B$.
5p	**b)** Arătaţi că $(A-B)\cdot(B-A)=-8I_2$.
5p	**c)** Determinaţi matricea $X=\begin{pmatrix}a&b\\1&3\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A\cdot X=X\cdot B$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x}{x+e}$.
5p	**a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to e} f(x)$.
5p	**b)** Arătaţi că dreapta de ecuaţie $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-6, & x\le 2\\ x^2-a, & x>2\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Determinaţi numărul real a ştiind că funcţia f este continuă în punctul $x=2$.
5p	**b)** Pentru $a=8$, rezolvaţi ecuaţia $f(x)=0$.
5p	**c)** Pentru $a=8$, stabiliţi semnul funcţiei f.

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați a_{2015}, știind că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică cu $a_1 = 2015$ și $r = -1$.

5p **2.** Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(2,-3)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (2m+1)x + 3$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu 2 elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, ..., 9\}$, aceasta să fie formată doar din pătrate perfecte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,-2)$ și $C(1,2)$. Determinaţi coordonatele punctului B, știind că patrulaterul $OABC$ este paralelogram.

5p **6.** Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 3\sqrt{3}$ și $BD = 6$. Calculaţi aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră determinantul $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & 4 \\ 2 & x-1 & 7-x \\ 1 & -2 & x^2 \end{vmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $D(1)$.

5p **b)** Arătaţi că $D(x) = -(x-1)(x+1)(x+2)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(2^x - 3) = 0$.

2. Se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+3a & -6a \\ a & 1-2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $X(-1) + X(1) = 2X(0)$.

5p **b)** Arătați că $X(a)\cdot X(b) = X(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care matricea $X(a)$ este inversabilă.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că dreapta de ecuație $x = 1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-4}{x-2}$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{x+1} - 3, & x \leq -1 \\ 2x^3 + (a-3)x - 4, & x > -1 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinaţi numărul real a pentru care funcţia f este continuă în $x = -1$.

5p **b)** Arătaţi că $f(x) + 2 \leq 0$, pentru orice $x \leq -1$.

5p **c)** Pentru $a = -1$, arătaţi că ecuația $f(x) = 0$ are cel puţin o soluţie în intervalul $[0,2]$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi partea reală a numărului complex $z=i(1+i)^2$.
5p	**2.** Determinaţi numerele reale m, ştiind că imaginea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+1$ este intervalul $[-1,+\infty)$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x}+2^{x+1}=4-2^x$.
5p	**4.** Determinaţi numărul elementelor mulţimii $M=\{1, 2, 3,\ldots, 2016\}$ care sunt divizibile cu 5 şi nu sunt divizibile cu 10.
5p	**5.** Se consideră triunghiul ABC şi punctul M astfel încât $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{BM}$. Arătaţi că $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.
5p	**6.** Determinaţi numerele reale $x\in[0,\pi]$, pentru care $\sin 2x=\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2015 & 2016 & x\\ 2015^2 & 2016^2 & x^2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculați $\det(A(2016))$.
5p	**b)** Demonstrați că $\det(A(x))=(2015-x)(2016-x)$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $\det(A(x))$ are valoarea minimă.
	2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $X(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.
5p	**a)** Calculați $A\cdot A$.
5p	**b)** Demonstrați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați inversa matricei $M=X(-3)\cdot X(-2)\cdot X(-1)\cdot X(0)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot X(3)\cdot X(4)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{mx^2+4x-m}{x-1}$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătaţi că dreapta de ecuaţie $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei f, pentru orice număr real m.
5p	**b)** Determinaţi numărul real m, pentru care dreapta de ecuaţie $y=3$ este asimptotă orizontală la graficul funcției $g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.
5p	**c)** Pentru $m=-1$, calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+2a, & x<2\\ ax+\log_2 x, & x\geq 2\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Pentru $a=0$, calculaţi $f(-1)\cdot f(4)$.
5p	**b)** Demonstrați că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real a.
5p	**c)** Demonstrați că, dacă $a\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(-1,4)$.