

**Examenul de bacalaureat național 2017**

**Proba E. c)**

**Matematică *M\_șt-nat***

**Clasa a XI-a**

**Simulare**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați numărul real  $x$ , știind că numerele  $x+2$ ,  $7$  și  $2x$  sunt în progresie aritmetică.
- 5p** 2. Se consideră  $x_1$  și  $x_2$  soluțiile ecuației  $x^2 - 2(m-1)x + 2m^2 - 2m = 0$ . Determinați numărul real  $m$ ,  $m \neq 0$ ,  $m \neq 1$  pentru care  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $5^{2x} = 125 \cdot 5^{-x}$ .
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu două elemente ale mulțimii  $M = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ , aceasta să conțină elementul 10.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,1)$ ,  $B(2,3)$  și  $C(3,a)$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$  pentru care punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt coliniare.
- 5p** 6. Arătați că  $2\sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1 = 0$ , știind că  $\sin x = \frac{1}{3}$  și  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} \frac{x+1}{2} & \frac{x-1}{2} \\ \frac{x-1}{2} & \frac{x+1}{2} \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Calculați  $\det(A(3))$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $\det(A(x)) \cdot \det(A(y)) = \det(A(xy))$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $\det(A(1) + A(2) + \dots + A(n)) = n(\det(A(1)) + \det(A(2)) + \dots + \det(A(n)))$ , pentru orice număr natural nenul  $n$ .
2. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Calculați  $A - B$ .
- 5p** b) Arătați că  $(A + I_2) \cdot (B - I_2) = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ .
- 5p** c) Demonstrați că, dacă  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  astfel încât  $X \cdot A = A \cdot X$  și  $X \cdot B = B \cdot X$ , atunci  $X \cdot Y = Y \cdot X$ , pentru orice  $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + ax + 6}{x+1}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Pentru  $a = 7$ , calculați  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $a$ , pentru care dreapta de ecuație  $y = x + 2$  este asimptotă oblică spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că, oricare ar fi numărul real  $a$ , funcția  $f$  **nu** admite asimptotă orizontală spre  $+\infty$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{2mx}{2-x}, & x \in (-\infty, -2) \\ 2x + 4 - m, & x \in [-2, +\infty) \end{cases}$ , unde  $m$  este număr real.

**5p** a) Demonstrați că funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ , pentru orice număr real  $m$ .

**5p** b) Pentru  $m = 1$ , rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $f(x) = 0$ .

**5p** c) Determinați numărul real  $m$  pentru care  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$ .

**Examenul de bacalaureat național 2014**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Simulare pentru elevii clasei a XI-a**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați numărul real  $x$  știind că numerele 4, 36 și  $x$  sunt în progresie geometrică.
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + a$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$  pentru care  $(f \circ f)(x) = x$  pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^{-x+2} = \sqrt{3}$ .
- 5p** 4. Determinați numărul submulțimilor cu cel mult 3 elemente ale mulțimii  $M = \{1, 2, 3, 4\}$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctul  $A(2, -3)$  și dreapta  $d: 2x + y - 5 = 0$ . Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul  $A$  și este perpendiculară pe dreapta  $d$ .
- 5p** 6. Calculați  $\sin 2x$ , știind că  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\cos x = \frac{3\sqrt{5}}{7}$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $O(0,0)$ ,  $A(0,2)$ ,  $B(3,5)$  și  $C(6,8)$ .
- 5p** a) Determinați ecuația dreptei  $AC$ .
- 5p** b) Verificați dacă punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt coliniare.
- 5p** c) Demonstrați că aria triunghiului  $AOB$  este egală cu aria triunghiului  $BOC$ .
- 5p** 2. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Calculați  $2A + 2B$ .
- 5p** b) Arătați că  $(A - B) \cdot (B - A) = -8I_2$ .
- 5p** c) Determinați matricea  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  cu proprietatea că  $A \cdot X = X \cdot B$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln \frac{x}{x+e}$ .
- 5p** a) Calculați  $\lim_{x \rightarrow e} f(x)$ .
- 5p** b) Arătați că dreapta de ecuație  $x = 0$  este asimptotă verticală la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Determinați ecuația asimptotei spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x - 6, & x \leq 2 \\ x^2 - a, & x > 2 \end{cases}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Determinați numărul real  $a$  știind că funcția  $f$  este continuă în punctul  $x = 2$ .
- 5p** b) Pentru  $a = 8$ , rezolvați ecuația  $f(x) = 0$ .
- 5p** c) Pentru  $a = 8$ , stabiliți semnul funcției  $f$ .

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M\_șt-nat*

Clasa a XI-a

Simulare

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați  $a_{2015}$ , știind că  $(a_n)_{n \geq 1}$  este progresie aritmetică cu  $a_1 = 2015$  și  $r = -1$ .
- 5p 2. Determinați numărul real  $m$ , știind că punctul  $A(2, -3)$  aparține graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - (2m+1)x + 3$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2}$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu 2 elemente ale mulțimii  $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ , aceasta să fie formată doar din pătrate perfecte.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(5, -2)$  și  $C(1, 2)$ . Determinați coordonatele punctului  $B$ , știind că patrulaterul  $OABC$  este paralelogram.
- 5p 6. Se consideră dreptunghiul  $ABCD$  cu  $AB = 3\sqrt{3}$  și  $BD = 6$ . Calculați aria triunghiului  $ABC$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră determinantul  $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & 4 \\ 2 & x-1 & 7-x \\ 1 & -2 & x^2 \end{vmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p a) Calculați  $D(1)$ .
- 5p b) Arătați că  $D(x) = -(x-1)(x+1)(x+2)$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $D(2^x - 3) = 0$ .
2. Se consideră matricea  $X(a) = \begin{pmatrix} 1+3a & -6a \\ a & 1-2a \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $X(-1) + X(1) = 2X(0)$ .
- 5p b) Arătați că  $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab)$ , pentru orice numere reale  $a$  și  $b$ .
- 5p c) Determinați valorile reale ale lui  $a$  pentru care matricea  $X(a)$  este inversabilă.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ .
- 5p a) Arătați că dreapta de ecuație  $x=1$  este asimptotă verticală la graficul funcției  $f$ .
- 5p b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2}$ .
- 5p c) Determinați ecuația asimptotei oblice spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} e^{x+1} - 3, & x \leq -1 \\ 2x^3 + (a-3)x - 4, & x > -1 \end{cases}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Determinați numărul real  $a$  pentru care funcția  $f$  este continuă în  $x = -1$ .
- 5p b) Arătați că  $f(x) + 2 \leq 0$ , pentru orice  $x \leq -1$ .
- 5p c) Pentru  $a = -1$ , arătați că ecuația  $f(x) = 0$  are cel puțin o soluție în intervalul  $[0, 2]$ .

**Examenul de bacalaureat național 2016**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Clasa a XI-a**

**Simulare**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați partea reală a numărului complex  $z = i(1+i)^2$ .
- 5p** 2. Determinați numerele reale  $m$ , știind că imaginea funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + mx + 1$  este intervalul  $[-1, +\infty)$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{2x} + 2^{x+1} = 4 - 2^x$ .
- 5p** 4. Determinați numărul elementelor mulțimii  $M = \{1, 2, 3, \dots, 2016\}$  care sunt divizibile cu 5 și nu sunt divizibile cu 10.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul  $ABC$  și punctul  $M$  astfel încât  $\overline{CM} = 2\overline{BM}$ . Arătați că  $\overline{AM} = 2\overline{AB} - \overline{AC}$ .
- 5p** 6. Determinați numerele reale  $x \in [0, \pi]$ , pentru care  $\sin 2x = \sin x$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2015 & 2016 & x \\ 2015^2 & 2016^2 & x^2 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Calculați  $\det(A(2016))$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $\det(A(x)) = (2015 - x)(2016 - x)$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $\det(A(x))$  are valoarea minimă.
2. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $X(a) = I_2 + aA$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Calculați  $A \cdot A$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $X(a) \cdot X(b) = X(a+b)$ , pentru orice numere reale  $a$  și  $b$ .
- 5p** c) Determinați inversa matricei  $M = X(-3) \cdot X(-2) \cdot X(-1) \cdot X(0) \cdot X(1) \cdot X(2) \cdot X(3) \cdot X(4)$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{mx^2 + 4x - m}{x-1}$ , unde  $m$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că dreapta de ecuație  $x=1$  este asimptotă verticală la graficul funcției  $f$ , pentru orice număr real  $m$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $m$ , pentru care dreapta de ecuație  $y=3$  este asimptotă orizontală la graficul funcției  $g: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ .
- 5p** c) Pentru  $m = -1$ , calculați  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2}$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 2a, & x < 2 \\ ax + \log_2 x, & x \geq 2 \end{cases}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Pentru  $a = 0$ , calculați  $f(-1) \cdot f(4)$ .
- 5p** b) Demonstrați că funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** c) Demonstrați că, dacă  $a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ , ecuația  $f(x) = 0$  are cel puțin o soluție în intervalul  $(-1, 4)$ .