Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați numărul complex z, știind că $2\overline{z}+iz=4+5i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-2x$. Determinați valorile reale ale lui x pentru care $(f\circ f)(x)<x$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2+1}\cdot\sqrt[3]{27}=3^3$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând o submulțime dintre submulțimile cu două elemente ale mulțimii $A=\{0,1,2,3,4,5\}$, aceasta să conțină numai numere pare.
5p	**5.** Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB=8$, $AD=4$ și punctul M, mijlocul laturii CD. Calculați lungimea vectorului $\vec{v}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BM}$.
5p	**6.** Se consideră $E(x)=\sin\frac{2x}{3}-\cos\frac{8x}{3}$, unde x este număr real. Arătați că numărul $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$ este natural.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a^2+a&a^2-a&1\\a^2-a&a^2+a&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(-2))=-32$.
5p	**b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $\det(A(x)-xI_3)\geq 0$.
5p	**c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_a\left(a^2+a,a^2-a\right)$, unde a este număr real. Demonstrați că pentru orice număr real nenul a, punctele P_a, P_{-a} și O **nu** sunt coliniare.
	2. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&2^x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Demonstrați că $M(x)\cdot M(-x)=M(0)$, pentru orice număr real x.
5p	**b)** Calculați inversa matricei $M(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**c)** Arătați că $\det(M(1)+M(2)+\ldots+M(n))=2n^2\left(2^n-1\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.
5p	**a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_n=f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(n)$ este descrescător.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2^x+\sin(x-1)+m, & x\le 1 \\ \dfrac{\sqrt{3x-2}-1}{x^2-1}, & x>1 \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\dfrac{3}{4}$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Pentru $m=-\dfrac{5}{4}$, demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(0,2)$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=4-i$. Calculați $z\cdot\overline{z}-z-\overline{z}$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că axa Ox este tangentă graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-(2m+1)x+m^2-m+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3\log_x 5+\log_5(5x)=5$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie multiplu de 11.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul M mijlocul laturii BC și punctul N mijlocul medianei AM. Demonstrați că $\overrightarrow{BN}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Arătați că, dacă $(\sin x+3\cos y)^2+(\cos x-3\sin y)^2=10$ și $x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, atunci $x=y$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $\Delta(x,y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x+1 & y+1 & 2\\ x^2+x & y^2+y & 2\end{vmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\Delta(0,2)=-2$.

5p **b)** Arătați că $\Delta(x,y)=(x-1)(y-1)(y-x)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Demonstrați că numărul $\Delta(m,n)$ este divizibil cu 2, pentru orice numere întregi m și n.

2. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & 0 & a-1\\ 0 & 1 & 0\\ a-1 & 0 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $A(0)+A(2)$.

5p **b)** Arătați că $A(a)A(b)=A(2ab-a-b+1)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Arătați că $A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{3}{2}\right)A\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{2017}{2}\right)=A\left(\frac{1}{2}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x^2+3x+1}{x^3(x+1)^3}$.

5p **a)** Arătați că $f(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x+1)^3}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\right)^{2n^3}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2-x+a, & x\le 0 \\ \dfrac{e^{4x}-1}{e^{3x}-1}, & x>0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care funcţia f este continuă în punctul $x=0$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in(-6,-3)$, atunci ecuația $f(x)=0$ are cel puțin două soluții reale distincte în intervalul $(-3,-1)$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Simulare pentru elevii clasei a XI-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați $z+\overline{z}$, știind că $z=3+4i$ și $\overline{z}$ este conjugatul numărului complex z.
5p	**2.** Determinați numărul real pozitiv m pentru care dreapta $x=2$ este axă de simetrie a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-\left(m^2-1\right)x+3$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x-1)=2\log_2 x$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale $\overline{abc}$, cu a, b și c nenule, au suma cifrelor egală cu 5.
5p	**5.** Se consideră triunghiul ABC și punctul D astfel încât $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$. Determinați numărul real p pentru care $\overrightarrow{AD}=p\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.
5p	**6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AC=6$ și $\cos B=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & 2\\ x^2+1 & y^2+1 & 5\end{vmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
5p	**a)** Calculați $D(1,-1)$.
5p	**b)** Arătați că $D(x,y)=(x-2)(y-2)(y-x)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale x pentru care $D\left(2^x,4^x\right)=0$.
	2. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & x\\ 1 & x & 1\\ x & 1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculați $A(1)-A(-2)$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(n)$ este inversabilă pentru orice număr natural n, $n\neq 1$.
5p	**c)** Determinați inversa matricei $A(0)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\frac{n+1}{n^2}$.
5p	**a)** Arătați că $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ pentru orice număr natural nenul n.
5p	**b)** Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(na_n\right)^{\sqrt{n^2+2}}$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x<2\\ 0, & x=2\\ \frac{x-b}{2x+1}, & x>2\end{cases}$, unde a și b sunt numere reale.
5p	**a)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**b)** Determinați numerele reale a și b pentru care funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.
5p	**c)** Pentru $b=2$, rezolvați în mulțimea $(2,+\infty)$ inecuația $\left(7\cdot f(x)-1\right)\left(2^x-16\right)\leq 0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real x pentru care numerele 5, $2x+3$, $2x+7$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Arătați că, pentru orice număr real m, graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+(m-1)x-m$ intersectează axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2-x}=2x-1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice relaţia $5^{n-1}>(n+1)!$.

5p **5.** Determinați numerele reale a și b, știind că, în reperul cartezian xOy, punctul de intersecție a dreptelor $x+(2a+1)y-4=0$ și $3x+by-8=0$ este $M(a,-2)$.

5p **6.** Arătați că $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\operatorname{tg} x$, pentru orice număr real $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix}1 & x & \frac{1}{x}\\ 1 & y & \frac{1}{y}\\ 1 & \frac{1}{2} & 2\end{vmatrix}$, unde x și y sunt numere reale nenule.

5p **a)** Arătaţi că $D\left(2,\dfrac{1}{2}\right)=0$.

5p **b)** Arătaţi că $D(x,y)=-\dfrac{1}{2xy}(2x-1)(2y-1)(x-y)$, pentru orice numere reale nenule x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(\log_2 x,\ 2)=0$.

2. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}1&2&a\\a&1&2\\2&a&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $2A(1)-A(-1)=A(3)$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale a şi b pentru care $A(a)+bI_3=2\left(A(1)-I_3\right)\left(A(1)-I_3\right)$.

5p **c)** Arătaţi că matricea $A(n)$ este inversabilă pentru orice număr natural n.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x}$ și şirul de numere reale $(a_n)_{n\ge1}$, $a_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$.

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **b)** Arătați că șirul $(a_n)_{n\ge1}$ este crescător.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)(a_n-\ln n)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+a+1, & x\le 1\\ x^2+a^2x, & x>1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinați numerele reale a pentru care funcția f este continuă în $x=1$.

5p **b)** Pentru $a=2$, calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x)+x}\right)$.

5p **c)** Pentru $a=-1$, arătați că ecuația $f(x)+2^x=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $[-1,0]$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\log_{2016} 63 + \log_{2016} 32 + \sqrt{0,0625} = \frac{5}{4}$.

5p **2.** Determinați numărul real m, pentru care soluțiile ecuației $x^2 - (3m-4)x + m - 3 = 0$ verifică relația $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 2^x + 4^x - 8^x = 0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, acesta să fie soluție a ecuației $f(n) = 0$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(n) = n^3 + 3n - 4$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC = 6\sqrt{3}$ și $m(\sphericalangle A) = 120^\circ$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Arătați că $\sin(a+b) = 1$, știind că $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $a \neq b$ și $\sin a + \cos a = \sin b + \cos b$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} x & 3 & y \\ x^2 & 2 & y^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Calculați $\Delta(-1,0)$.

5p **b)** Demonstrați că $\Delta(x,y) = (x-y)(xy - 3x - 3y + 2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele întregi distincte x și y, știind că $\frac{1}{y-x}\Delta(x,y) = 8$.

2. Se consideră matricea $A(n) = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 0 & 1 & 2^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde n este număr natural.

5p **a)** Calculați $A(1) - A(0)$.

5p **b)** Determinați inversa matricei $A(1)$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $A(n) \cdot A(n) = A(p)$, atunci $n = 0$ și $p = 1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{2x+1}{x}$ și șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = f(n)$.

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **b)** Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător.

5p **c)** Demonstrați că $\ln 2 < x_n \leq \ln 3$, pentru orice număr natural n, $n \geq 1$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-4x+3}, & x<1\\ \sqrt{x^2+4x-4}+a, & x\geq 1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

5p **b)** Determinați numărul real a, pentru care funcţia f este continuă în punctul $x=1$.

5p **c)** Pentru $a=2$, calculaţi $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x>1}}\dfrac{\ln\left(f(x)-2\right)}{x-1}$.